

# DESCOMPOSICIONES GENÉTICAS RELACIONADAS CON EL CONCEPTO DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

*Abel Medina Mendoza, Alejandro Miguel Rosas Mendoza*

## Resumen

Este trabajo se encuadra en un proyecto de investigación doctoral en el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA) del Instituto Politécnico Nacional, cuyo objetivo principal es “Construir el concepto de ecuación diferencial ordinaria de primer orden mediante la descomposición genética para su aplicación en la solución de problemas de circuitos eléctricos”. Desde la práctica docente se ha observado que en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales los conceptos permanecen ocultos por fórmulas y procesos algorítmicos que dificultan la comprensión y aplicación de los mismos. Así, como antecedente presentamos investigaciones sobre la descomposición genética de conceptos claves del cálculo, como son la transformación lineal, la derivada, el diferencial de una función de varias variables, la regla de la cadena y el de ecuación diferencial; así como la teoría y metodología APOE, acordes para trabajar con conceptos matemáticos de alta abstracción como el concepto de ecuación diferencial.

**Palabras clave:** APOE, Descomposición genética, Ecuaciones Diferenciales.

## Introducción

El objetivo de este avance de investigación en Matemática Educativa es presentar problemáticas y dificultades que se presentan para lograr la comprensión y aplicación del concepto de ecuación diferencial.

Distintas investigaciones en el campo de la Educación Matemática han revelado un conjunto de dificultades que los estudiantes han encontrado en el proceso de aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), de las cuales se pueden citar:

Perdomo (2011), presenta una investigación relacionada con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las EDO; donde se distinguen dos partes principales: análisis de la forma en que un grupo de estudiantes que han recibido una formación tradicional del concepto utilizan sus conocimientos matemáticos para resolver problemas y responder a cuestiones relacionadas con las EDO y, el análisis del papel que la resolución de problemas, la tecnología y la interacción juegan en el proceso de aprendizaje. El análisis de los datos obtenidos en la primera fase, permitieron constatar que el enfoque de enseñanza habitual, en el que se introduce el concepto a partir de su definición formal y los métodos algebraicos de resolución, no favorece el desarrollo de la comprensión del concepto. El análisis con el uso de la herramienta tecnológica y el modelo de trabajo en el aula, contribuyeron a crear un clima de indagación, reflexión, planteamiento de conjeturas y verificación.

Villar-Liñan y Llinares-Ciscar (1996), establecen el modo en que los estudiantes son capaces de definir el concepto de ecuación diferencial y la proximidad entre esta definición y la definición formal. Los resultados de esta investigación muestran que aunque sólo la décima parte de los estudiantes definió de forma precisa el concepto de ecuación diferencial, señalando con ejemplos diferentes EDO de variables separadas o lineales, casi la mitad de los alumnos propuso ejemplos correctos de ecuaciones diferenciales. Esto llevó a los autores a concluir que “el hecho de no definir una noción no es obstáculo para su identificación en un determinado contexto” y que “la imagen del concepto (de ecuación diferencial que tienen los alumnos) está muy ligada a expresiones formales, casos particulares y ejemplos concretos” (p. 99).

Rasmussen (2001), hace referencia a las dificultades que entraña el concepto de solución de una ecuación diferencial. Estas dificultades las asocia con el hecho de que es un espacio formado por funciones y no por valores numéricos. Esta conclusión la extrae de un estudio sobre la concepción que tienen los estudiantes acerca de las soluciones de equilibrio de una EDO, las aproximaciones numéricas y la estabilidad. Zandieh y McDonald (1999), identificaron esta misma dificultad en una investigación en la que apuntan como posible causa de estos errores conceptuales al hecho de que en muchas de las actividades que realizan los estudiantes no es necesario pensar en la variable, considerando ecuaciones de la forma  $y' = f(x, y)$ , como una solución o una función.

Guerrero, Camacho y Mejía (2010), también observaron que los estudiantes consideraban las funciones constantes sólo como números y no como funciones. Estos autores realizan una investigación haciendo uso del registro gráfico como medio de solución de EDO. Los resultados de esta investigación muestran que los estudiantes recuerdan las definiciones de algunos conceptos de cálculo pero les resulta imposible aplicarlas en un nuevo contexto de conocimiento, en este caso, el bosquejo de campos de direcciones y la interpretación de soluciones.

Rodríguez (2012) en su investigación tiene como objetivo que el alumno comprenda el modelo para representar, comprender y estudiar diversos fenómenos de naturaleza social, química, mecánica y eléctrica, así como la importancia de la visualización de representaciones de diversos aspectos de la Ecuación Diferencial a través del uso de tecnología. La autora realizó su investigación de tipo cualitativa. La autora concluye que el diseño de las actividades como observación, videgrabaciones, realización de reactivos permitió alcanzar los objetivos previstos para el proceso de modelación matemática y la tecnología utilizada constituye un apoyo importante en la transición entre el dominio físico y matemático así como el desarrollo de competencias tecnológicas.

En el taller “Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias a partir del análisis de fenómenos de variación” de Codes y Perdomo (2012), los investigadores presentaron un conjunto de actividades tanto para realizar de forma individual como en pequeños grupos con lápiz y papel y, con el software de cálculo simbólico Maple, para introducir el concepto de EDO. Los resultados obtenidos sirvieron para reflexionar sobre los conocimientos previos necesarios (como Álgebra), para el diseño de cuestionarios y actividades de trabajo en el aula.

El análisis realizado de cada una de las investigaciones presentadas sobre las dificultades en la comprensión o aplicación del concepto de EDO, nos permitió visualizar el papel tan

importante que juega la resolución de problemas, el uso de tecnología y la interacción en el proceso de aprendizaje, de igual forma que la comprensión del concepto matemático está muy ligada a expresiones formales y modelación de casos contextuales en donde el uso de registros gráficos son un medio adecuado para la solución de EDO. Lo anterior permite que los estudiantes logren comprender el concepto de EDO, aunque en un inicio lo vean muy distante.

### **Marco teórico**

La Teoría APOE (por las siglas de Acción, Proceso, Objeto, Esquema) es una teoría de tipo cognitivo-constructivista iniciada por Dubinsky y continuada por el grupo de investigadores llamados *Research in Undergraduate Mathematics Education Community* (RUMEC); la APOE se inició en Estados Unidos y se ha extendido a otros países (entre ellos México) a partir de la formación del RUMEC, cuya investigación está centrada en cómo un sujeto construye conceptos matemáticos y adquiere habilidades para enfrentar y resolver problemas (Miranda, 2003).

Esta teoría fue desarrollada por Ed Dubinsky a partir de lo que Piaget llamaba “Abstracción Reflexiva”. Dicha “Abstracción reflexiva” es un mecanismo, introducido por Piaget para describir el desarrollo del pensamiento lógico en niños, y Dubinsky extiende esta idea al mecanismo de construcción de los conceptos matemáticos más avanzados (Campero, 2010). En la Teoría APOE el investigador puede comparar las construcciones de un estudiante sobre un concepto matemático cualquiera, con las construcciones mentales que dicho estudiante pueda haber hecho o le falten por hacer.

Campero (2010) menciona que la Teoría APOE está diseñada para trabajar con conceptos de las matemáticas universitarias, en particular conceptos que requieren grados altos de abstracción como los que trata la presente investigación.

Miranda (2003) menciona que algunos investigadores han concluido con base a las observaciones de los estudiantes, que para que alguien se apropie de un conocimiento es necesario seguir una secuencia de construcciones mentales de la Teoría APOE, como se describen a continuación:

#### **Acciones**

Son una manipulación física o mental sobre objetos. La persona las percibe como algo externo, y cada uno de sus pasos es estimulado por el anterior.

#### **Procesos**

Se pueden describir como una serie de acciones sobre un objeto, con la particularidad de que el individuo los controla de manera consciente, es decir, puede describirlas paso a paso, invertirlas, coordinar y componer una transformación con otras para obtener una nueva.

#### **Objetos**

Cuando una persona reflexiona sobre las operaciones aplicadas en un proceso particular, llega a tomar conciencia de éste como una totalidad, sobre el que puede efectuar y construir acciones o transformaciones; entonces, se dice que ese proceso ha sido transformado en un objeto.

#### **Esquemas**

Es una colección de acciones, procesos, objetos y aun otros esquemas (hay una relación dialéctica en espiral, pues los objetos pueden ser transformados por nuevas acciones, lo cual lleva a nuevos procesos, objetos y esquemas).

Miranda (2003) menciona que una vez que se ha detectado el tema sobre el que se quiere investigar, se tiene el reto de aplicar una pedagogía efectiva del concepto a enseñar, que empieza con el diseño de una descomposición genética del tema, el cual es un modelo del entendimiento en donde se proponen y muestran las posibles construcciones mentales que tiene que realizar un estudiante para llegar a apropiarse de un conocimiento, así como sus orígenes y las relaciones con otras estructuras que se deben poseer.

Azcárate y Camacho (2003) sugieren que para la elaboración de una propuesta de una descomposición genética determinada, se considera que la comprensión de un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales, previamente contruidos, para formar acciones; entonces las acciones se interiorizan para formar procesos, los cuales se encapsulan para formar objetos. A su vez los objetos pueden ser des-encapsulados hacia los procesos a partir de los cuales fueron formados. Finalmente las acciones, procesos y objetos pueden ser organizados en esquemas. Las construcciones son las Acciones, los Procesos, los Objetos y los Esquemas, mientras que los mecanismos para hacer esas construcciones son las siguientes: interiorización, coordinaciones, reversiones, encapsulaciones y des-encapsulaciones. En definitiva, con los conceptos de acción, proceso, objeto, esquema y los mecanismos de construcción se describe lo que se denomina la descomposición genética de un concepto.

La descomposición genética, según Badillo (2003) es el eje de la aplicación de la Teoría APOE en estudios sobre la comprensión de objetos matemáticos porque permite estructurar el concepto matemático, orienta a la organización del contenido a enseñar y el diseño de actividades y tareas que contribuyan a la construcción de las estructuras que se busca que los estudiantes desarrollen.

### **La Teoría APOE en la Matemática Educativa**

Para determinar los elementos teóricos y metodológicos que conduzcan a atender la problemática y considerando el impacto en investigaciones en el campo de la matemática educativa, se abordan experiencias con la teoría APOE, teniendo como eje de aplicación la descomposición genética en diferentes conceptos matemáticos.

Roa y Oktac (2010), dan a conocer el procedimiento para diseñar una descomposición genética sobre el *concepto de transformación lineal*, mostrando los pasos seguidos en su construcción y las dificultades para realizarlo. El diseño se determina por la elaboración y desarrollo del análisis teórico que plantea el ciclo de investigación de la Teoría APOE: Análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza y observación, análisis y verificación de datos. Los resultados permitieron describir dos caminos para construir el concepto de transformación lineal, que fueron determinados por mecanismos mentales diferentes: uno por el de coordinación, el otro por el de interiorización.

De igual forma, Gutiérrez y Valdiva (2012) describen la descomposición genética del *concepto de derivada* bajo la Teoría APOE. El estudio está enmarcado en uno de tipo cualitativo, la recolección y análisis de la información, y se desarrolló a través de cuatro

actividades: fragmentación de la información, identificación y clasificación de las unidades de análisis, disposición y organización de la información y descripción estructurada. Lo cual permitió reflexionar sobre el cómo explicar y desarrollar la definición de la derivada en clases para activar en los estudiantes procesos tales como reflexión, abstracción, síntesis y generalización, que generan la encapsulación de la definición.

Así mismo, Suárez (2013) elabora un estudio sobre la descomposición genética del concepto *diferencial de una función en varias variables*, donde comprende el análisis de los elementos matemáticos que conforman el concepto, mencionando la importancia del concepto diferencial en las matemáticas avanzadas y en aplicaciones a otras ciencias. Donde con el estudio se busca establecer los niveles de comprensión del concepto en el marco de la teoría APOE. El tipo de investigación utilizada es cualitativa, orientada hacia la forma como los estudiantes comprenden/construyen el concepto diferencial de una función en varias variables. El autor concluye que la teoría APOE aporta una base metodológica y teórica para abordar la complejidad de la comprensión de un concepto del Pensamiento Matemático Avanzado, es decir donde interactúan los procesos mentales para representar, visualizar, generalizar, clasificar, conjeturar, inducir, analizar, sintetizar, abstraer, definir, formalizar y demostrar.

Mybert, Maharaj y Brijlall (2012), presentan un estudio en progreso que tiene como objetivo *ayudar a los estudiantes a entender y aplicar la regla de la cadena*, mediante el uso de la Teoría APOE y la descomposición genética de un conjunto de construcciones mentales, con la finalidad que los estudiantes comprendan la composición de funciones, derivadas y la regla de la cadena. El estudio se realiza bajo un enfoque cualitativo, donde se busca que el análisis de las respuestas escritas y las entrevistas del cuestionario utilizado, permitan obtener información sustancial para la identificación de construcciones mentales. Los resultados obtenidos que la composición de funciones es clave para entender la regla de la cadena, haciendo mención que la teoría APOE, a pesar que ha sido escasamente utilizada, mediante el uso adecuado de diversas actividades ayudó a entender el concepto matemático.

De gran importancia para este trabajo de investigación es la aportación de Jaimes y Chaves (s.f.), que mencionan en su trabajo “Análisis teórico de la ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas” que en el estudio de las ecuaciones diferenciales, los conceptos son evadidos por fórmulas y procesos algorítmicos que dificultan la comprensión del concepto. Desarrollan en su trabajo una descomposición genética preliminar del concepto ecuación diferencial tomando como marco teórico y metodológico la Teoría APOE. Concluyen que para construir esquemas que permiten comprender el objeto ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema en general, es necesario comprender cómo se construyen estos objetos matemáticos en algunos modelos particulares, lo que enriquece al sujeto de acciones, procesos y objetos.

## Método

La Teoría APOE tiene una metodología de investigación fundamentada en el ciclo metodológico de investigación de dicha teoría (análisis teórico, diseño y aplicación de instrumentos y, análisis y verificación de datos).

**Análisis teórico:** El objetivo central es diseñar la descomposición genética de los conceptos matemáticos de la investigación.

**Diseño y aplicación de instrumentos:** Una vez definida la descomposición genética original, es necesario documentarla. El objetivo central es el diseño y aplicación de instrumentos que ayuden a construir los conceptos matemáticos de la investigación y posteriormente el diseño y aplicación de los instrumentos que nos ayudarán a validar la propuesta didáctica e identificar las construcciones mencionadas en la descomposición genética.

**Análisis y verificación de datos:** El objetivo central es llevar a cabo el análisis de los datos empíricos obtenidos de la componente anterior. En este punto determinar si fueron adecuados los elementos considerados de la descomposición genética de los conceptos matemáticos de la investigación.

La metodología de investigación se abordará con un enfoque cualitativo, Hernández, Fernández, y Baptista (2014), mencionan que el enfoque cualitativo puede concebirse como un conjunto de prácticas interpretativas que hacen al mundo “visible”, lo transforman y convierten en una serie de representaciones en forma de observaciones, anotaciones, grabaciones y documentos. Es naturalista porque estudia los fenómenos y seres vivos en sus contextos o ambientes naturales y en su cotidianidad e interpretativo pues intenta encontrar sentido a los fenómenos en función de los significados que las personas les otorguen.

La población para el desarrollo de la investigación serán los estudiantes del IV semestre de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales del Instituto Tecnológico de Comitán, el planteamiento a seguir en la metodología de investigación es:

#### **Análisis Teórico:**

- Experiencia docente (cuestionario o entrevista a docentes e investigadores sobre la enseñanza-aprendizaje de EDO de primer orden).
- Cuestionario a estudiantes sobre conocimientos previos necesarios para el tema de EDO de primer orden.
- Mapas conceptuales sobre los conceptos y modelación de EDO de primer orden (información necesaria para determinar los componentes de la descomposición genética).

#### **Diseño y Aplicación de Instrumentos:**

- Cuestionarios (de conceptos teóricos y de resolución de problemas: de manera manual y mediante el uso de una herramienta computacional)
- Entrevistas (escritas y audiograbadas) para analizar las respuestas de los cuestionarios aplicados y llegar a interpretaciones más precisas.

#### **Análisis y Verificación de datos:**

- Se realizará simultáneamente con el análisis del resultado de la aplicación de instrumentos.

#### **Reflexiones**

La revisión de investigaciones en Matemática Educativa, aunado al análisis reflexivo de estas investigaciones para el desarrollo de la competencia específica, ha permitido definir los elementos teóricos y metodológicos que conducirán el trabajo de investigación para el logro del objetivo planteado. Con lo anterior se llega a las siguientes consideraciones:

- La Teoría adecuada, por la complejidad del tema de investigación como lo sugieren algunos autores, es la Teoría APOE y porque se busca generar un estudio sobre cómo se construye dicho conocimiento.
- El modelo para el desarrollo de la competencia específica será mediante la descomposición genética del concepto de EDO de primer orden.
- La metodología que guía las actividades del trabajo de investigación, es la metodología asociada fundamentada en el ciclo metodológico de la Teoría APOE.
- El trabajo de investigación tendrá un enfoque cualitativo.

Aún no se cuenta con resultados, sin embargo con las consideraciones anteriores se está planeando el desarrollo de actividades e instrumentos que permitan la obtención y análisis de datos para finalmente valorar la descomposición genética para el logro de la competencia específica y dar solución a la problemática planteada.

## Referencias

- Azcárate, C., y Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 135-149.
- Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia* (Tesis de Doctorado no publicada). Universidad Autónoma de Barcelona. España.
- Campero, J. (2010). *Propuesta didáctica en optimización dinámica: El caso del cálculo de variaciones y la teoría de control* (Tesis de doctorado no publicada). CICATA-IPN. México.
- Codes, M., y Perdomo J. (2012, febrero). *Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias a partir del análisis de fenómenos de variación*. Taller presentado en el III Seminario del Grupo de Investigación en Didáctica del Análisis Matemático, Salamanca, España.
- Guerrero, C., Camacho, M., y Mejía, H. (2010). Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias que modelan un problema. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), pp.341–352.
- Gutiérrez, L., y Valdivé, C. (2012). Una descomposición genética del concepto de derivada. *Gestión y Gerencia*, 6(3), 104-122.
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación*. México: Mc Graw Hill Education.
- Jaimes, L., y Chaves, R. (s.f.). *Análisis teórico de la ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas*. Manuscrito en preparación.
- Miranda, E. (2003). La construcción de un concepto matemático. *Renglones*, 54, 20-24.



- Mybert, Z., Maharaj, A., y Brijlall, D. (2012). Reflective Abstraction and Mathematics Education: The Genetic Decomposition of the Chain Rule – Work in Progress. *US-China Education Review B*, 2(4), 408-414.
- Perdomo, J. (2011). Módulo de enseñanza para la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias en un ambiente de resolución de problemas con tecnología. *Números*, 78, 113-134.
- Roa, S., y Oktac, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 89-112.
- Rasmussen, C. (2001). New directions in differential equations. A framework for interpreting students' understandings and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 55-87.
- Rodríguez, R. (2012, mayo). *Competencias de modelación y uso de tecnologías en ecuaciones diferenciales*. Proyecto de investigación presentado en la Corporación Universitaria para el Desarrollo de Internet A.C., Baja California, México.
- Suárez, Z. (2013, octubre). *Descomposición genética del concepto diferencial de una función de varias variables*. Trabajo de investigación presentado en el Congreso de Investigación y Pedagogía, Colombia.
- Villar-Liñan, M. T., y Llinares-Ciscar, S. (1996). Análisis de errores en la conceptualización y simbolización de ecuaciones diferenciales en alumnos de químicas. *Educación Matemática*, 8(2), 90-101.
- Zandieh, M., y McDonald, M. (1999). Student Understanding of Equilibrium Solution in Differential Equations. En F. Hitt y M. Santos (Eds.). *Proceedings of the Twenty-one Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 253-257). Columbus, OH: ERIC.

### **Autores**

Abel Medina Mendoza; ITCOMITAN. México; [amedina105@hotmail.com](mailto:amedina105@hotmail.com)

Alejandro Miguel Rosas Mendoza; CICATA-Legaria, IPN. México;  
[alerosas2000@gmail.com](mailto:alerosas2000@gmail.com)